Physique générale : quantique, Série 9

Assistants et tuteurs :

elena.acinapura@epfl.ch
sara.alvesdossantos@epfl.ch
felice.bordereau@epfl.ch
jeanne.bourgeois@epfl.ch
sofia.brizigotti@epfl.ch
thomas.chetaille@epfl.ch
marco.dimambro@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
douaa.salah@epfl.ch
arianna.vigano@epfl.ch

Exercice 1 : Oscillateur harmonique quantique à l'échelle macroscopique

Considérer une particule de masse $m = 100$ g soumise à un potentiel harmonique avec une fréquence angulaire $\omega = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Supposer que l'oscillateur est mis en mouvement sur une oscillation d'amplitude totale $L = 10$ cm.

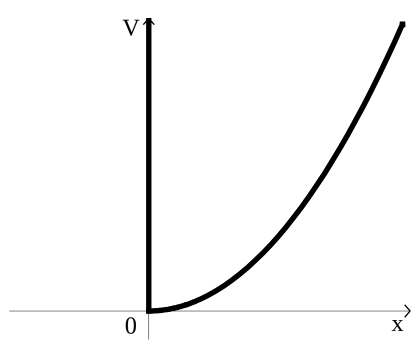
1. Calculer le nombre de quanta d'énergie qui composent ce mouvement.
2. Calculer l'énergie de l'état fondamental. Cette énergie est associée à une oscillation. Calculer l'amplitude de cette oscillation et comparer le résultat à la taille d'un atome (environ 0.1 nm).

Exercice 2 : Le demi-oscillateur harmonique

Considérer le potentiel suivant en une dimension (esquissé dans la figure) :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

avec $m, \omega > 0$.



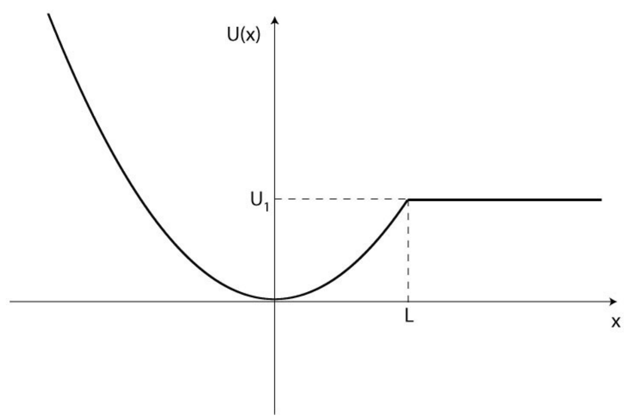
1. Sans faire des calculs, mais par le biais de considérations sur l'équation de Schrödinger et les conditions aux bords, déduire des états propres (en nombre infini) du système, à partir

des états propres de l'oscillateur harmonique à la même fréquence ω (c.-à-d. de l'équation de Schrödinger avec $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ partout). Donner les énergies propres correspondantes.

Remarque Les états propres de l'oscillateur harmonique sont caractérisés par des fonctions d'onde $\psi_n(x) = e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$ (à une constante de normalisation près). $H_n(y), n = 0, 1, 2, \ldots$ sont les polynômes de Hermite, qui ont la parité de n par rapport à l'inversion $y \to -y$. Cette propriété est fondamentale pour la solution de ce problème.

2. Démontrer que les états propres trouvés dans le point précédent sont tous les états propres du système.

Exercice 3 : L'oscillateur harmonique "ouvert"



Considérons une particule de masse m soumise au potentiel de la Figure ci-contre. Pour $x < L$, le potentiel est celui d'un oscillateur harmonique, $U(x) = m\omega^2 x^2/2$, tandis que pour $x \geq L$ le potentiel est constant et vaut U_1. La fonction d'onde de l'état fondamental de ce système, dans l'intervalle $x \in [-\infty, L[$ est celle de l'état fondamental d'un oscillateur harmonique. On fait l'hypothèse que l'énergie propre de cet état est $E < U_1$.

1. Déterminez la fonction d'onde de l'état fondamental sur tout l'axe $x \in [-\infty, +\infty]$. Montrer qu'il doit y avoir une relation entre E et ω.
2. Déterminez la valeur de $E(U_1, L)$, en fonction de U_1 et L, qui satisfait l'équation de Schrödinger et les conditions au bord pour cet état propre.

Exercice 4 : Question de type examen

Le mouvement d'une particule de masse m en une dimension est régi par l'équation de Schrödinger suivante

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x)+\alpha x\psi(x)=E\psi(x), \tag{2}$$

où $\alpha > 0$. Quelles sont les valeurs propres de l' énergie E_n, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$?

1. $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{2m\omega^2}{\alpha^2}$
2. $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)$
3. $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$
4. $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{\alpha^2}{2m\omega^2}$